

수학I 수학 수업 표준기준

수학 수업 표준기준은 모든 단계의 수학 교육자들이 학생들이 탐구를 추구해야 하는 다양한 수학 전문성을 설명한다. 이런 수학 수업은 “과정과 능숙”에 중요성을 두고 동시에 다년간의 수학 교육 중요성도 지속하는 것이다. 첫 번째는 문제 해결력, 논리력 및 입증, 커뮤니케이션, 설명 및 연결이라는 NCTM 과정 학습기준이다. 두 번째는 내셔널 리서치 위원회의 보고서인 *Adding It Up*에 명시된 수학적 능숙도 이다: 응용 논리력, 전략적 숙달력, 개념 이해력(수학 개념, 계산 및 관계에 대한 독해력), 과정적 능숙 (문제 푸는 과정을 능숙히, 정확하게, 효율적으로 적절히 수행하는 기술), 그리고 건설적 성향 (수학을 이치에 맞는, 유용하며 가치있는 것으로 여기는 습관을 만들고, 성실과 자신의 능률성을 함께 성장시킨다).

1 문제를 파악하고 끈기있게 답을 찾는다.

수학에 능숙한 학생들은 우선적으로 문제의 의미를 설명하면서, 그 문제를 어디서부터 시작할 지를 찾는다. 주어진 사실, 제약, 관계 및 목표를 분석한다. 급하게 문제를 풀려는 시도 보다는 오히려, 문제의 유형과 의미를 추측하고, 문제 푸는 과정을 계획한다. 문제 푸는 과정을 살펴보고 검산하면서 필요한 경우 과정을 바꾼다. 고학년 학생들은, 문제의 맥락에 따라, 대수적 표기로 전환하거나 그래프 계산기로 문제를 다른 시각으로 보면서 필요한 경우 정보를 수집한다. 수학에 능숙한 학생들은 방정식 사이의 상관관계, 언어 표기, 도표와 그래프를 설명할 수 있으며 또는 중요한 특징과 관계, 그래프 데이터를 도형으로 그려서 공식이나 성향을 찾을 수 있다. 저학년 학생들은 구체적인 물체나 그림을 이용하여 문제를 개념화시켜 문제를 풀 수 있다. 수학에 능숙한 학생들은 문제의 답을 검산할 때 다른 방법을 이용하면서 스스로에게 지속적으로, “이치에 맞는가?”를 자문한다. 타학생이 푼 복잡한 문제의 접근법을 이해할 수 있으며, 다양한 접근법 사이의 상관관계를 식별할 수 있다.

2 추상적 논리와 양적 타당성.

수학에 능숙한 학생들은 양적 개념과 문제 상황 속의 그들의 관계를 이해한다. 양적 관계과 개입된 문제를 해결하기 위해 두개의 상보완적인 능력을 지니고 있다: *비개념화* – 주어진 상황을 추상화시켜서 그것을 부호로 표기하여, 문제 그 자체가 현재 실생활인 것처럼 부호로 표기를 조작한다. 이때에 참고 정보에 필요치 않은 주의를 기울이지 않는다 – 그리고 *개념화*; 즉 필요한 경우 조작 과정동안 잠시 시간을 두고 부호가 개입된 참고 정보를 통해 검산 과정을 거친다. 양적 논리력은 문제를 현실화하는 조리정연한 표기를 만들어내는 학습습관을 포함한다; 즉 개입된 양적 단위를 고려한다; 단지 산술 계산법뿐 아니라 양적 의미에 주의를 기울인다; 그리고 여러 계산법과 물체를 융통성있게 이용한다.

3 실행가능한 논점을 만들고 타인의 논리를 비평한다.

수학에 능숙한 학생들은 명시된 가정, 정의 그리고 논점 구성에 따라 나온 이전의 결과를 이해하고 이를 이용한다. 논리적 진전 과정을 추측하고 구축하여 그 추측의 진실을 탐구한다. 문제를 사건별로 나누어서 상황을 분석할 수 있으며 상반되는 예를 인식하고 이용한다. 자신의 결론을 검증시키며, 타인에게 이를 소통하며 타인의 논점에 응답한다. 데이터를 귀납적으로 추리하며, 데이터로부터 오는 맥락을 고려할 때 생길 수 있는 타당한 논점을 구성한다. 수학에 능숙한 학생들은 더불어 두 개의 타당한 논점의 효과성을 비교하여, 올바른 논리 또는 추리를 하자가 있는 것으로부터 판별할 수 있으며, 그리고 – 논점에 하자가 있다면 – 그것을 설명할 수 있다. 초등생들은 물체, 그림, 도표 그리고 행동과 같은 구체적인 참고물을 이용하여 논점을 구성할 수 있다. 후에 고학년생이 될 때까지 보편화하여 공식으로 만들지 못한다고 해도, 그런 논점은 타당성이 있어야 하고 정확해야 한다. 그런 다음, 논점이 적용되는 범위를 결정하는 것을 배운다. 모든 학년의 학생들은 타인의 논점을 듣거나 읽어서, 이런 논점이 이치에 맞는지를 결정하고 논점을 명확성을 높이거나 개선할 수 있는 유용한 질문을 제시할 수 있다.

4 수학이 포함된 모델.

수학에 능숙한 학생들은 일상의 생활, 사회, 직장에서 발생하는 여러 문제를 푸는데 수학을 적용할 수 있다. 저학년생들은 덧셈 방정식을 쓰는 간단한 방법을 통해 상황을 설명할 수 있다. 중간 학년생들은 학교 행사를 계획하고 커뮤니티의 문제를 분석할 때 비율 논리를 적용할 수 있다. 고교생들은 기하학을 통해 디자인 문제를 풀거나 함수를 이용하여 하나의 양적 이해가 다른 것에 어떻게 의존하는지를 설명할 수 있다. 자신이 알고 있는 것을 적용할 수 있는 수학 능숙생들은 가정과 대략화를 쉽게 하여 복잡한 상황을 간략화하며 동시에, 후에 수정이 필요할 수 있다는 것을 인식한다. 실생활 상황에서 중요한 양을 식별할 수 있으며, 도표, 쌍방 차트, 그래프, 플롯차트와 공식과 같은 도구를 이용하여 그들의 관계를 지도화할 수 있다. 이런 관계를 수학적으로 분석하여 결론을 내릴 수 있다. 수학적 결과를 상황적 맥락속에서 일상적으로 분석하여, 그 결과가 이치에 맞는지, 그 목적에 맞지 않을 경우 모델을 개선할 가능성이 있는지를 살펴본다.

5 적절한 도구를 전략적으로 유용한다.

수학에 능숙한 학생들은 수학 문제를 풀 때 사용가능한 도구들을 고려한다. 이런 도구들에는 연필과 종이, 구체적인 모델, 자, 각도기, 계산기, 스프레드시트, 컴퓨터 대수 시스템, 통계적 패키지, 동적 기하 소프트웨어가 포함될 수 있다. 능숙생들은 학년 또는 학과목에 적절하도록, 이런 도구와 충분히 익숙하여 이런 도구가 언제

도움이 되는지를 올바르게 결정할 수 있으며 동시에 이점이 되는 것과 제약에 대하여 직관적으로 인식한다. 예를 들면, 수학에 능숙한 고교생들은 함수 그래프와 그래핑 계산기를 통한 답을 분석한다. 견적치와 기타 수학 지식을 이용하여 가능한 오류를 전략적으로 찾아낸다. 수학 모델을 만들 때, 테크놀로지를 이용해서 다양한 가정의 결과를 시각화시킬 수 있음을 알며, 결과를 탐구하고, 데이터와 함께 예상한 결과를 비교한다. 다양한 학년마다 수학 능숙생들은 외부적 수학 자원 즉, 웹사이트에서 찾을 수 있는 디지털 내용과 같이 관련된 정보를 식별할 수 있으며, 이를 이용하여 문제를 제시하거나 푼다. 테크놀로지 도구를 이용하여 개념 이해를 깊이있게 탐구할 수 있다.

6 정확도에 유의한다.

수학에 능숙한 학생들은 타인에게 정확하게 소통하려 한다. 명확한 정의를 통해 자신의 논리성 그리고 타인과 토론하려 한다. 자신이 선택한 부호의 의미를 명시하며, 등부호를 일관성있게 적절히 이용한다. 측정 단위를 명시하거나 표기할 때 주의를 기울여 문제 내의 양적 상응관계를 명확히 한다. 정확하고 능률적으로 계산하고, 숫적 답을 문제의 맥락에 맞게 정확히 표현한다. 초등학교 학생들은 공식화된 설명을 서로에게 자세히 한다. 고교생이 되면, 주장 내용을 조사하는 것을 배워서 정의를 명확히 사용한다.

7 전체 구조를 찾고 이를 이용한다.

수학에 능숙한 학생들은 패턴이나 구성을 찾기 위해 면밀히 조사한다. 어린 학생들, 예를 들면 세 개와 일곱 개 더 많다는 것은 일곱 개와 세 개가 더 많다는 것과 동일한 양임을 알아차리거나 또는 모양체의 면이 같은 수에 따라 모양을 분류할 수 있다. 시간이 지나면, 7×8 은 $7 \times 5 + 7 \times 3$ 와 동등함을 알게 되며, 즉 분배 법칙에 대해 배우는 예비 학습인 것이다. 상급 학년 학생들은 $x^2 + 9x + 14$ 의 표기에서 14는 2×7 그리고 9는 $2 + 7$ 임을 알 수 있게 된다.

기하 모양체에서 기존의 선의 중요성을 인식하여 전략적으로 보조 선을 그어서 문제를 풀 수 있다. 더불어 전체를 개요하면서 관점을 전환할 수 있다. 복합적인 물체를 즉, 일부 대수 문제와 마찬가지로, 단일 물체로 보거나 여러 물체를 모아서 집합한 물체로 볼 수 있다. 예를 들면, $5 - 3(x - y)^2$ 를 5 빼기 양수 곱하기 제곱수로 볼 수 있으며, 이로 통해 그 수치는 실수 x 와 실수 y 에서는 5 이상이 될 수 없음을 알게 된다.

8 반복된 논리로부터 규칙성을 찾고 이를 표현한다.

수학에 능숙한 학생들은 산수 계산이 반복되면, 일반적인 방법과 지름길 방법을 둘 다를 이용한다. 초등교 상급 학생의 경우, 25 나누기 11을 할 때, 같은 계산을 계속 반복하게 되어 소수점이 반복된다는 것을 결론적으로 알게 된다. 경사 기울기를 계산할 때, 기울기 3과 (1, 2)를 통과하는 선 상에 있는 점들을 반복적으로 확인하면서, 중학생들은 $(y - 2)/(x - 1) = 3$ 의 방정식을 만들어낼 수 있다. $(x - 1)(x + 1)$, $(x - 1)(x^2 + x + 1)$, 그리고 $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ 를 확장할 때 간소화하는 과정에서 규칙성을 알아채리면서, 일련의 기하형의 집합을 위한 일반 공식으로 연결할 수 있다. 수학에 능숙한 학생들은 문제를 풀 때 그 과정을 살피면서 동시에 작은 실수도 놓치지 않으려고 한다. 문제 푸는 중간 과정에서 나온 결과에도 그 타당성을 지속적으로 확인한다.

수학 수업 표준기준과 수학 학습 기준을 연결한다

수학 수업을 위한 표준기준에는 수학 학문을 연마하는 학생들이 점차적으로 교과목 내용에 더 많이 개입할 수 있는 방법이 설명되어 있으며, 따라서 학생들은 초등학교, 중학교 그리고 고등학교 교육을 받으면서 수학적 성숙도와 전문성이 성장하게 된다. 교과과정, 학력평가 및 전문성 개발을 고안하는 사람들은 수학 수업에서 수학 교과목 내용을 연결하는 노력을 기울여야 한다.

수학 학습기준은 절차와 이해의 균형을 갖춘 집합체이다. “이해”라는 어휘로 수업을 시작하는 경우 특히 더 수업을 수학 내용으로 연결할 수 있는 좋은 기회가 되는 경우가 자주 있다. 수업 주제에 대한 이해가 부족한 학생은 절차에 더 많이 의존할 수도 있다. 어떤 방법이 문제 푸는데 효과가 있는지에 대한 충분한 기초가 없다면, 유사 문제를 고려할 가능성이 적으며, 문제를 조리있게 나타내지 못하며, 결론의 정당성이나 수학을 현실 상황에 응용할 가능성이 적다. 더불어 수학 문제에 테크놀로지를 의식있게 이용하거나 타학생들에게 정확하게 설명치 못하며, 감산에 어려움을 겪을 수 있으며 이미 알고 있는 절차는 지름길 방법으로 계산할 수 있는 가능성이 적어진다. 간단히 말하면, 이해 부족한 학생들이 수학 수업에 적극적으로 참여치 못하게 하는 결과를 초래한다.

이런 관점에서, 수학 이해의 목표를 둔 이런 학습기준은, 수학 학습기준과 수학 수업 기준 사이의 “교차로 지점”이 될 잠재성이 있다. 이런 교차로 지점들은 학교 수학 교과과정의 중앙이 되는 그리고 보편적인 개념으로 무게를 두어야 하며, 이로서 시간, 자원, 혁신적인 열정을 가장 효과적으로 유용할 수 있으며 그리고 교과과정, 수업, 학력평가, 전문성 개발 및 학생의 수학 성취도를 질적으로 높일 수 있다.